WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

Программа, вращающая на экране дисплея четырехмерные гиперкубы

А. К. ДЬЮДНИ

«МОЙ МУЖ буквально растворился в воздухе, и я думаю, что вы в какой-то степени причастны к этому!» — Я узнал женщину, говорившую со мной по телефону. Это была Черил, и она была явно не в себе. Ее муж Мэги, мой специальный помощник по микрокомпьютерам в Университете шт. Западный Онтарио, по всей видимости, исчез, наблюдая за поведением компьютерной программы, которую я предложил ему написать. Программа вращает четырехмерный аналог куба, называемый гиперкубом, и проектирует его на экран дисплея. Черил взволнованно продолжала: «По экрану движется какой-то странный узор, а вещи моего мужа свалены в кучу у кресла. Он, наверное, был в этих странных цветных очках с картонной оправой. А это что? Боже мой, его носки остались в туфлях!»

Мне стало ясно, что здесь имело место классическое проявление четырехмерного помешательства. Его жертвы убеждены, что они вышли за пределы обычного пространства и очутились в четырехмерном мире, невидимом для остальных людей. Это иллюзорное впечатление, что человек стал невидимым, может быть настолько сильным, что затрагивает восприятие и других людей: жертва помешательства может войти в комнату полную людей и остаться незамеченной. К счастью, случай с Мэги закончился благополучно, но об этом потом. А пока расскажу о программе, вращающей гиперкубы, сделав предварительно одно предупреждение, к которому, надеюсь, читатели отнесутся достаточно серьезно. Те, кто склонен к помешательству, как Мэги, не должны писать эту программу и тем более наблюдать за ее работой на экране дисплея. К потенциальным жертвам можно отнести всех, у кого наблюдался навязчивый интерес к пространствам высших размерностей, а также тех, кто, пусть даже не часто, но задумывался о заманчивых перспективах неизведанных пространств и миров.

Четвертое измерение стало предметом физических и метафизических размышлений по крайней мере с конца прошлого столетия. Идея четвертого измерения имела наибольший успех в специальной и общей теориях относительности Эйнштейна. В этих теориях пространство и время в совокупности образуют четырехмерный континуум, в котором все события во Вселенной оказываются как бы навсегда замороженными. Такая концепция Вселенной может подвергаться модификациям в количестве измерений. Например, в так называемых теориях Клейна — Калузы вводится семь или более дополнительных измерений в форме миниатюрных гиперпузырьков, прикрепленных к каждой точке пространства-времени (см. статью Дэниела З. Фридмана и Питера ван Ньювенхойзена «Скрытые измерения пространства-времени», опубликованную в майском номере нашего журнала за 1985 г.).

Четвертое измерение, с которым я познакомился, а познакомившись, полюбил его, — это дитя математики. Читатели, находящиеся в обыкновенных комнатах, имеют трехмерную систему координат, так сказать, у себя над головой. Три плоскости встречаются в каждом углу комнаты, и из этого угла исходят три линии, каждая из которых является пересечением двух плоскостей. Каждая линия перпендикулярна двум другим. Может ли читатель представить себе еще одну, четвертую линию, перпендикулярную этим трем? Наверное нет, но именно этого требуют математики, сооружая чисто абстрактную конструкцию, называемую четырехмерным пространством. Теперь вам предоставляется возможность самим исследовать это пространство, не подвергая себя непосредственной опасности. Для этого нужно лишь написать программу, которую я называю HYPERCUBE (гиперкуб).

Если говорить о происхождении этой программы, то вспомним, что еще в середине 60-х годов А. Нолл, в то время работавший в фирме Bell Laboratories, отснял фильм, в котором представлены двумерные тени, отбрасываемые четырехмерными объектами, движущимися в четырехмерном гиперпространстве. Однако в ее теперешнем виде программа была разработана Т. Бэнкоффом и его коллегами по лаборатории компьютерной графики в Университете Брауна, и настоящая статья была написана под влиянием впечатления, которое произвели на меня замечательные изображения, порожденные программой (см. рисунки на с. 99, 101 и 102). Бэнкофф, профессор математики, возглавляет визуальные исследования поверхностей и пространств высших размерностей в дополнение к своим геометрическим исследованиям. В 1978 г. совместно с Ч. Строссом он продемонстрировал генерируемый компьютером десятиминутный цветной фильм «Гиперкуб: проекции и разрезы». Этот фильм уже успел стать классическим в математическом подполье. Бэнкофф, вероятно, также является ведущим исследователем жизни и творчества Эдвина Аббота, английского священника и учителя, который в 1884 г. написал сказку о воображаемой жизни в двумерном мире («Flatland», см. библиографию на с.116).

Бэнкоффу и его коллегам удалось создать потрясающие изображения, иллюстрирующие свойства четырехмерных объектов. Например, рисунки на с. 99 изображают вращение четырехмерного гиперкуба в четырехмерном пространстве. Чтобы лучше понять эти картинки, рассмотрим тень, отбрасываемую обычным кубом на плоскость: эта тень может напоминать квадрат, заключенный в другом квадрате. Если затенить соответствующие грани куба, то тень представляет собой квадрат с квадратным отверстием внутри (см. нижний рисунок на с. 100).

Аналогично, когда гиперкуб освещен из точки, расположенной «над» обычным пространством в четвертом измерении, трехмерная тень, отбрасываемая гиперкубом, может напоминать куб, заключенный в другом кубе. Внутренний куб окружен шестью шестигранниками, которые можно рассматривать как искаженные кубы. Четыре искаженных куба, прилегающих к граням внутреннего куба, образуют в совокупности сплошное тело, торообразная поверхность которого показана на изображениях Бэнкоффа. Два других искаженных куба — внутренний и внешний — также образуют тор, который здесь не показан. Когда гиперкуб вращается, возникает ощущение, что квадратное отверстие в видимом торе надвигается на зрителя. Те, кто напишет свою версию программы HYPERCUBE, станут свидетелями других подобных эффектов, хотя уже и не таких реалистичных или «непрерывных».

Изображения, приведенные на с. 101 и 102, взяты из фильма «Гипер-

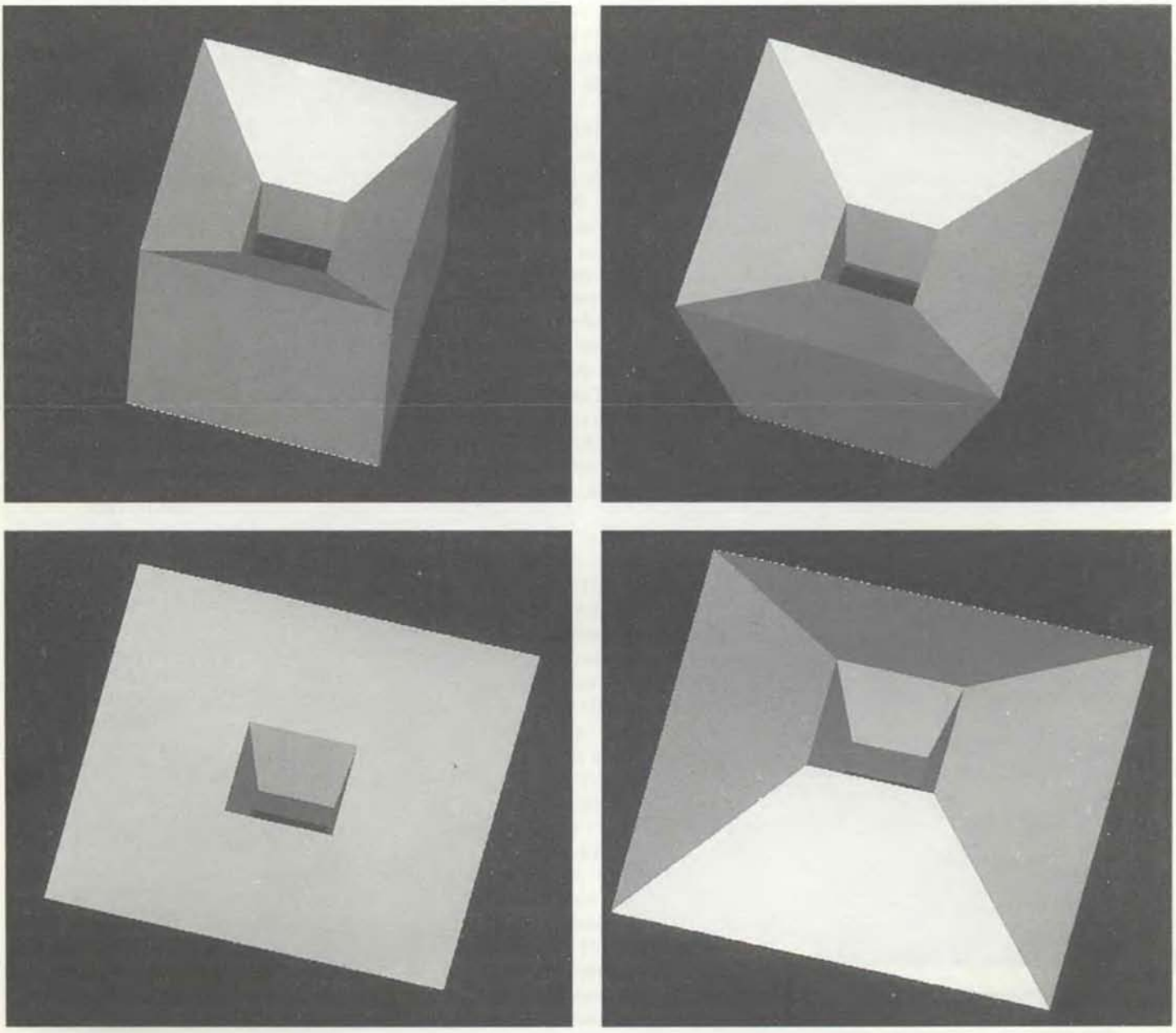
WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

сфера: расслоение и проекции», который готовят к выпуску Бэнкофф и его коллеги Г. Кошак, Д. Лэйдлоу и Д. Марголис. Гиперсфера представляет собой гораздо более сложный объект по сравнению с гиперкубом, и я не стану детально описывать ее. Тем не менее эти изображения можно в какой-то степени лучше понять, воспользовавшись аналогией с обычной сферой. Если в исходном положении сфера покоится на плоскости, касающейся южного полюса сферы, а источник света в исходном положении находится на ее северном полюсе, то тень, отбрасываемая на плоскость линиями параллелей сферы, будет представлять собой ряд концентрических окружностей (см. нижний рисунок на с. 100). Если сфера начинает поворачиваться, а источник света остается в фиксированном положении, то тени-окружности будут становиться неконцентрическими, а теневое изображение любой окружности, целиком лежащей в плоскости источника света, будет представлять собой прямую линию.

Аналогичным образом трехмерная «тень», отбрасываемая гиперсферой, может рассматриваться как ряд концентрических торов (см. рисунок на с. 101). Когда гиперсфера вращается, торы как бы раздуваются и проносятся один за другим. При этом любой тор, проходящий через источник света, становится бесконечно большим (см. рисунок на с. 102).

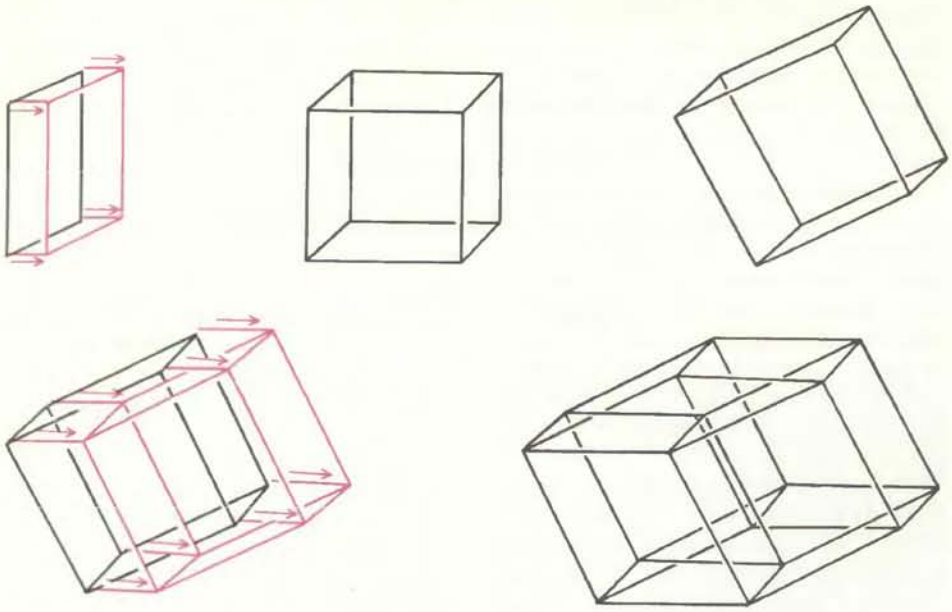
Рассмотрение аналогий в различных размерностях — ценное подспорье для построения и понимания четырехмерных объектов. Например, гиперкуб получается из куба точно так же, как куб получается из квадрата. Чтобы получить куб из квадрата, будем поднимать квадрат в направлении, перпендикулярном его плоскости, до высоты, равной его стороне (см. верхний рисунок на с. 100). Полученный в результате куб имеет 8 вершин (вдвое больше, чем у исходного квадрата) и 12 ребер — 4 стороны исходного квадрата и 4 стороны вновь полученного верхнего квадрата, а еще 4 получаются соединением вершин исходного квадрата с вершинами верхнего квадрата. Кроме того, у куба 6 квадратных граней — одна, совпадающая с исходным квадратом, одна — с поднятым и по одной грани-стене, воздвигнутой между каждой из 4 пар сторон, принадлежащих исходному и поднятому квадратам.

Если представить на мгновение, что у нас есть еще одно дополнительное измерение, то ту же операцию



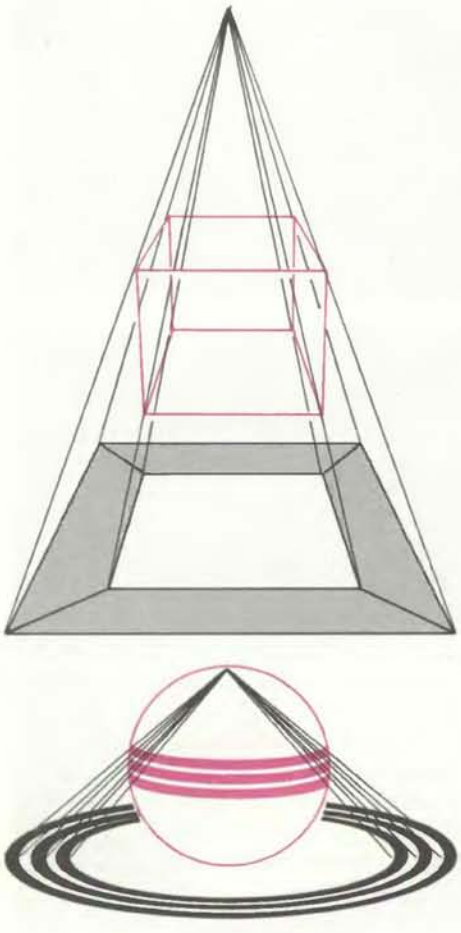
Поворот четырехмерного гиперкуба через измерения 2 и 4, проецируемый на обычное трехмерное пространство

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU



Квадрат порождает куб, а куб порождает гиперкуб

можно повторить уже для куба. В самом деле, «поднимем» куб из обычного пространства в направлении дополнительного измерения на «высоту», равную грани куба (смотри рисунок вверху). В результате получится гиперкуб. Но каково же все-таки направление дополнительного измерения? Я не могу этого объяснить. Даже фотография с изображением моей руки, указывающей в направлении четвертого измерения, не помогла бы. На ней рука была бы просто невидимой.



Проекции куба и сферы

Тем не менее количество вершин, ребер, граней и гиперграней (обыкновенных кубов), из которых состоит гиперкуб, можно легко подсчитать. Количество вершин равно количеству вершин в исходном кубе плюс их количество в перенесенном кубе — всего 16. Каждая из 8 вершин исходного куба соединяется ребром с одной из 8 вершин перенесенного куба, и, кроме того, есть еще 12 ребер в каждом из этих двух кубов. Таким образом, всего гиперкуб насчитывает 8 + 12 + + 12 = 32 ребра. Аналогично можно показать, что число обычных граней гиперкуба равно 24, а число гиперграней равно 8.

Должен выразить признательность Д. Лэйдлоу, объяснившему мне механизм программы HYPERCUBE. Версия программы, которую я здесь опишу, генерирует изображение гиперкуба, показывая лишь его вершины и ребра. Более того, изображения, генерируемые программой, не обязательно представляют один куб внутри другого; на самом деле изображение зависит от того, каким образом реализована программа и как она выполняется. Всякий раз при повороте гиперкуба его вершины переходят в новое положение и возникает новое, сбивающее с толку изображение объекта. Однако, когда у вас накопится некоторый опыт в экспериментировании, изображения станут в каком-то смысле понятными и вы почувствуете себя на пороге чего-то волнующе грандиозного и манящего.

В программе 16 вершин гиперкуба пронумерованы от 0 до 15 по простой схеме. Если каждый из этих номеров представить в двоичном виде и составить массив из элементов по четыре бита, то мы получим миниатюрную систему координат. Например, двоичное представление числа 13 состоит из 1 (одной восьмерки), 1 (одной четверки), 0 (ни одной двойки) и 1 (одной единицы). Таким образом, это число можно записать в виде (1,1,0,1). Такая запись уже дает нам практически систему координат для представления положения вершин гиперкуба. (Это не есть положение, которое напоминает куб внутри другого куба.) Чтобы перейти к более удобной системе координат, заменим нули на -1 и помножим каждый элемент массива на достаточно большое число, чтобы построить на экране дисплея изображение приемлемых размеров. Например, если в качестве такого множителя выбрать число 10, то координаты 13-й вершины будут представлены как (10,10,—10,10).

Конструируя программу HYPERCUBE, мы повсеместно сталкиваемся с размерностями. Двумерная матрица, или массив, *vert* хранит исходные координаты вершин. Поскольку всего насчитывается 16 вершин, каждая из которых задается четырьмя координатами, *vert* представляет собой матрицу размером 16 × 4 — всего 64 числа. *Vert* (i,j) — это j-я координата i-й вершины. Программа HYPERCUBE сохраняет матрицу *vert* неизменной, она определяется в начале программы, и ее содержимое переносится затем в другую матрицу размерами 16 × 4, назовем ее *cube*. Эту матрицу можно считать рабочей, ее содержимое постоянно меняется при поворотах гиперкуба, выполняемых программой.

После инициализации матрицы *vert* программу можно условно разбить на три главных раздела: выбор желаемого поворота гиперкуба, вычисление координат повернутого гиперкуба и представление (высвечивание) результатов поворота на экране дисплея. Если бы вращаемый объект был трехмерным, то поворот можно было бы выбрать, указав ось вращения и угол поворота вокруг этой оси. Однако при повороте четырехмерного объекта выбор оси вращения не определяет плоскости, в которой происходит поворот. Напомним, что существуют два неэквивалентных направления, перпендикулярные заданной плоскости. В то же время даже для четырехмерного гиперпространства остается справедливым, как и в обычном пространстве, то, что поворот может повлиять только на два измерения.

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

Когда поворачивается трехмерный объект, во вращательном движении принимают участие два измерения, в то время как третье остается неподвижным. Аналогично, при повороте четырехмерного объекта два его измерения меняют ориентацию в пространстве, а два других остаются неподвижными.

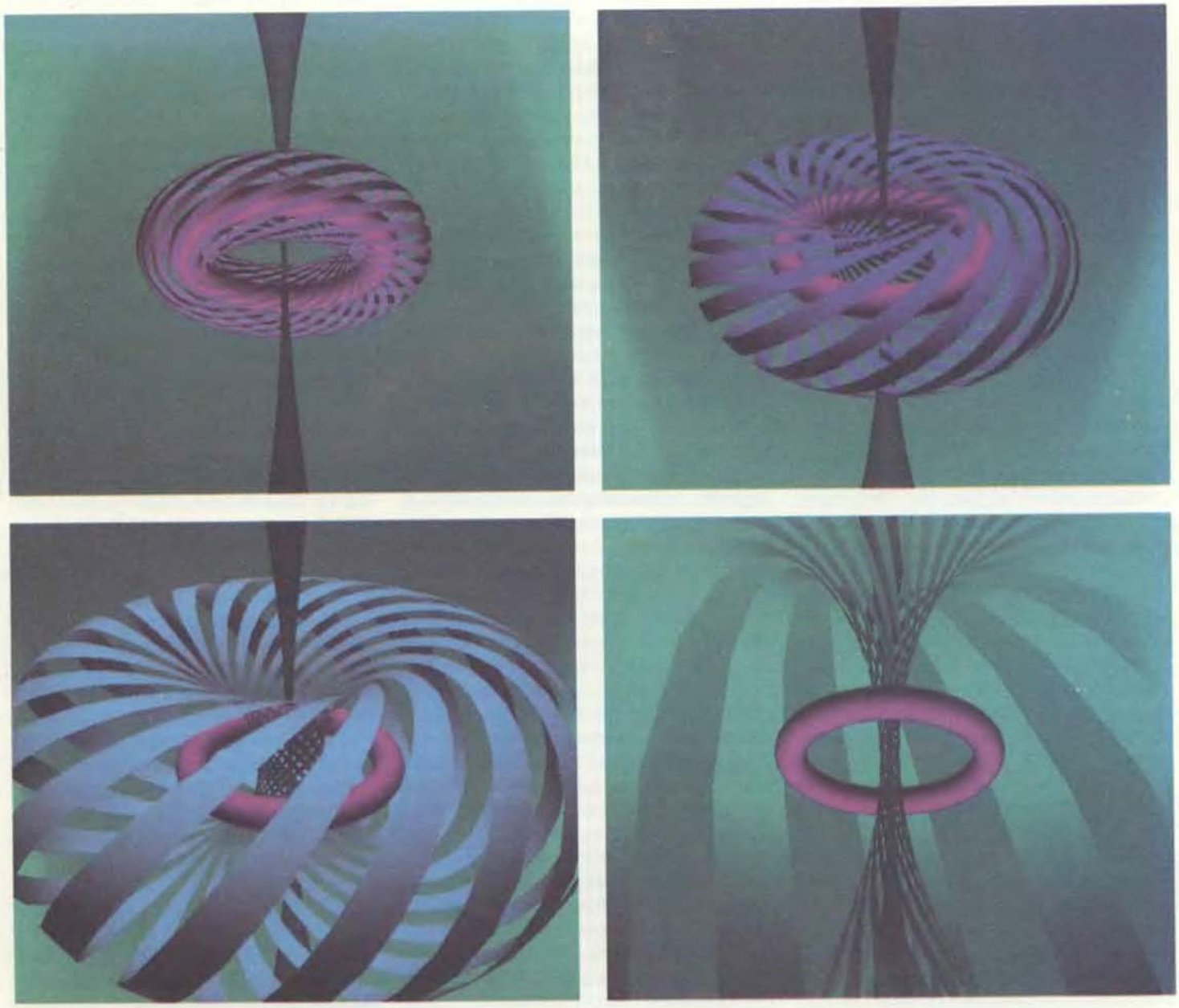
Существует много способов поворота четырехмерного объекта в новое положение. Однако оказывается, что любое положение может быть достигнуто последовательностью таких поворотов, которые ограничиваются плоскими движениями, определяемыми координатными осями окружающего четырехмерного пространства. В четырехмерном пространстве мы имеем 4 координатные оси, пронумерованные, скажем, от 1 до 4, и существует 6 способов разбиения их на пары. Следовательно, мы имеем 6 плоскостей в четырехмерном пространстве, определяемых координатными осями: плоскость 1—2, т. е. плоскость, заданная осями 1 и 2, плоскость 1—3, плоскость 1—4, плоскость 2—3, плоскость 2—4 и плоскость 3—4.

Для каждой из этих шести плоскостей есть свой вид поворота, который определяется квадратной матрицей размером 4 × 4. т. е. состоящей из 16 чисел. Назовем эти 6 матриц поворота соответственно *rot12*, *rot13*, *rot14*, *rot23*, *rot24* и *rot34*. Работая с программой, вы должны указать имя матрицы для выбранного поворота и величину угла поворота. Например, напечатав на клавиатуре терминала «*rot23*», а затем «60», вы тем самым задаете программе команду выполнить поворот на 60° в плоскости, заданной второй и третьей осями координат.

Предположим, вы хотите повернуть гиперкуб в плоскости третьего и четвертого измерений. Пожалуй, это самый загадочный из возможных поворотов. Для этого используется матрица *rot34*. В качестве ее элементов могут встретиться нули, единицы и три других числа, расположенные следующим образом:

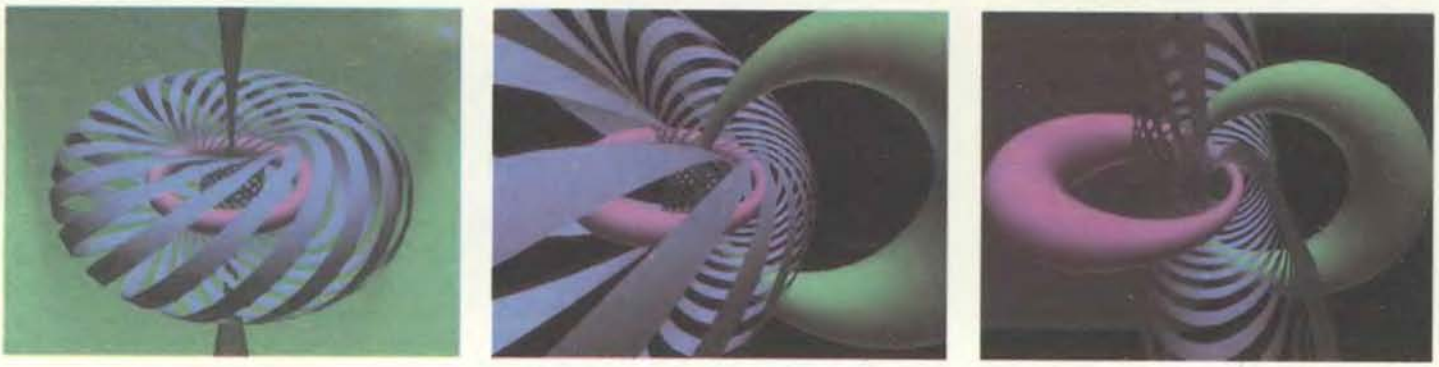
$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{matrix}$$

Выбранный вами угол поворота в градусах запоминается в переменной



Последовательность вложенных торов, которые по аналогии с параллелями на сфере являются проекциями гиперсферы на три измерения

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU



Проецируемое движение торов по мере вращения гиперсферы аналогично проекции движения параллелей во время вращения сферы

ang, причем величины *a* и *b* зависят от значения *ang*: *a* равно *cos* (*ang*), а *b* равно *sin* (*ang*), где *sin* и *cos* — обычные тригонометрические функции угла синус и косинус.

Правило получения остальных пяти матриц поворота довольно простое. Величина *a* появляется на главной диагонали каждой матрицы в положениях, соответствующих измерениям, которые затрагиваются при повороте. Величина *b* появляется на всех других пересечениях строк и колонок, соответствующих измерениям, которые участвуют в повороте. Все остальные элементы на главной диагонали равны 1, а прочие элементы матрицы равны 0. Например, матрица *rot13* имеет следующий вид:

$$\begin{matrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Когда нужная матрица поворота выбрана, значения ее элементов присваиваются программой HYPERCUBE специальной матрице *rote*. Это присвоение удобно выполнять в виде двойного цикла: внутренний цикл — для последовательности величин, расположенных по строке матрицы, а внешний — для последовательности строк.

Координаты вершин повернутого гиперкуба вычисляются путем «умножения» матрицы *cube* на выбранную матрицу поворота *rote*. Произведение этих двух матриц временно запоминается в третьей матрице, назовем ее *temp*, и оно дает координаты повернутого гиперкуба. Это произведение вычисляется по правилам умножения матриц, и для вычисления используется стандартная операция перемножения числовых матриц. Последняя заключается в большом количестве всевозможных перемножений, выполняемых в тройном цикле.

Так же как *vert* и *cube*, матрица *temp* имеет размер 16 × 4 и состоит из 64 чисел. Она дает четыре координаты для каждой из 16 вершин гиперкуба в новом положении. Каждый элемент матрицы *temp* (*i*, *j*) определяется двумя индексами *i* и *j*. Например, элемент *temp* (13,3) задает третью координату 13-й вершины повернутого гиперкуба. Его значение является суммой четырех произведений чисел, выбранных в точном определенном порядке из матрицы *cube* и матрицы *rote* (см. рисунок на с. 103). В качестве индекса внутреннего цикла программы можно взять букву *k*, пробегающую значения от 1 до 4, и этот цикл будет возвращать значение одного элемента матрицы *temp*. Цикл по *k* заключается затем в промежуточный цикл по индексу *j*. В цикле по *j* вычисляются все четыре координаты *i*-й вершины повернутого гиперкуба в соответствии с только что описанной процедурой. Другими словами, этот цикл заполняет все 4 элемента *i*-й строки матрицы *temp*. Наконец, цикл по *j* заключается во внешний цикл с индексом *i*. В цикле по *i* вычисляются все 16 строк матрицы *temp*, и когда этот цикл завершается, матрица *temp* дает координаты всех вершин повернутого гиперкуба, представшего перед нами в своем новом положении и, так сказать, во всей своей красе. Чтобы показать его на экране дисплея, потребуется еще один двойной цикл, заменяющий координаты старого положения гиперкуба в матрице *cube* его новыми, только что вычисленными координатами из матрицы *temp*.

У гиперкуба четыре измерения, а у экрана дисплея только два. Поэтому разумно было бы условиться, что, скажем, первые два измерения (или координаты) гиперкуба соответствуют координатам экрана. Простейший способ представления третьего и четвертого измерений гиперкуба заключается просто в том, чтобы игнорировать их. Именно так и работает метод отображения, который я здесь опишу, но его можно усовершенствовать (в результате чего проекция объекта может выглядеть демонически сложной), если попытаться сделать третье и четвертое измерения несколько более наглядными.

Чтобы отобразить «скелет» гиперкуба, программе нужно лишь показать его ребра. Поскольку у гиперкуба 32 ребра, то та часть программы, которая ответственна за отображение на экран, должна лишь провести соответствующие линии между 32 парами вершин. Но в каком порядке? Практически существует неограниченное количество вариантов, и поэтому ответ на этот вопрос, по-видимому, зависит от личного вкуса. Тем не менее трудно удержаться от соблазна изобразить ребра как след Эйлера. Он назван так в честь знаменитого математика Леонарда Эйлера. След Эйлера можно нарисовать карандашом, не отрывая его от бумаги и не проводя ни одной линии более одного раза. Последовательно нарисованные ребра гиперкуба в виде следа Эйлера имеют общую вершину.

В обход, пересекая, вверх и вниз скачет след Эйлера по мере того, как он проходит через вершины. Очень изящным представляется следующий порядок соединения вершин гиперкуба: 0,1,3,2,6,14,10,8,9,11,3,7,15, 14,12, 13,9,1,5,7,6,4,12,8,0,4,5,13,15,11, 10,2,0. Эти вершины хранятся в массиве *trail* с индексом *i*. Таким образом, *i*-я вершина в последовательности из 33 вершин обозначается как *trail* (*i*). Для каждого значения *i* выполняются команды выборки первой и второй координаты как элемента *trail* (*i*), так и *trail* (*i* + 1). Затем нужно выполнить команду, которая рисует на экране линию, соединяющую две заданные точки. Команды выборки и графическая команда вложены в единый цикл с индексом *i*, который от каждой точки-вершины последовательности проводит линию к следующей точке.

Теперь несколько слов о некоторых визуальных (и психологических) осложнениях. Существуют два стандартных метода представления третьего измерения гиперкуба. Ортографический метод просто игнорирует третье измерение, и все вершины проецируются на плоскую поверхность экрана вне зависимости от рас-

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NARODU

стояния между ними и экраном. В перспективе из одной точки вершины проецируются на экран так, как будто они являются тенями от света точечного источника, расположенного в центре экрана и на некотором расстоянии позади гиперкуба. Наблюдение этих теней на экране эквивалентно наблюдению гиперкуба с обратной стороны, однако визуально вид сзади неотличим от вида спереди.

Чтобы добиться эффекта перспективы из одной точки, в программе HYPERCUBE принимается, что третья координата вершины равна расстоянию между вершиной и экраном по линии, ведущей к воображаемому источнику света. Пользуясь признаками подобия треугольников, программа определяет множитель, необходимый для того, чтобы преобразовать первые две координаты вершины в координаты на экране дисплея. Например, если воображаемый источник света находится на расстоянии 20 единиц от экрана, вершина с координатами (5, – 7,11,18) может быть спроецирована на экран путем умножения каждой из первых двух координат на 20 и деления результата на разность 20—11, т. е. число 9.

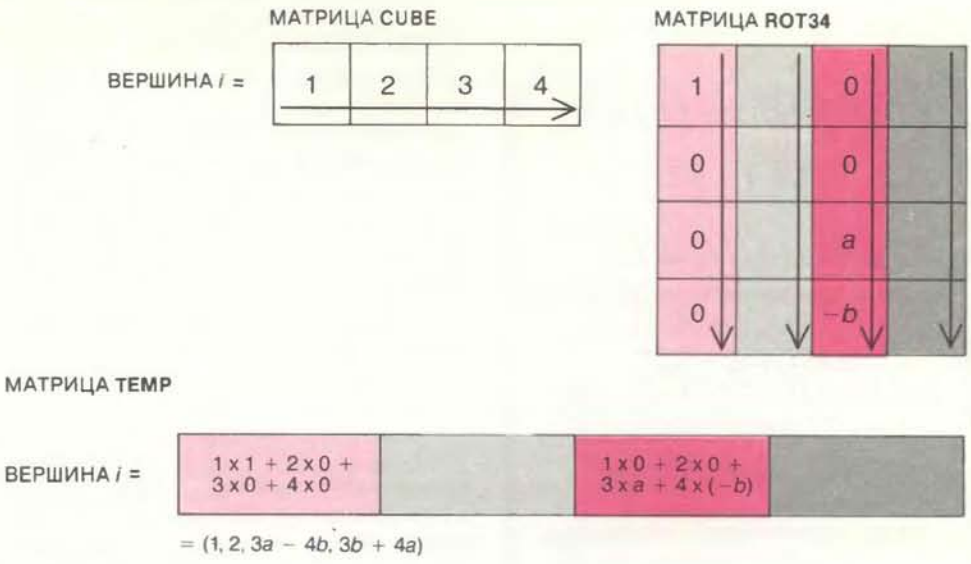
К сожалению, здесь мне не удастся уместить полное описание процесса, при помощи которого создаются стереоскопические изображения, показывающие четвертое измерение гиперкуба. Существует общий метод построения стереоскопических изображений, и в будущем я надеюсь посвятить этой теме одну из своих статей. Однако для программы HYPERCUBE Бэнкофф и его коллеги применили значительно более простой метод. Для каждого положения гиперкуба создаем два новых изображения путем применения матрицы *rot14* с углом поворота на 3° в одном направлении и на 3° в другом. Направление первого измерения параллельно горизонтальной линии зрения, а четвертое измерение — это цель, достигаемая процедурой. Два небольших поворота хорошо аппроксимируют вид гиперкуба для наблюдателя. Нужно лишь представить себе, как две линии зрения сходятся около центра гиперкуба под углом 6°.

Читатели, желающие получить удовольствие, наблюдая пространственное (трехмерное) изображение, могут сделать себе стереоскопические очки из красного и синего целлофана. В данном случае программа HYPERCUBE должна выполняться дважды, по одному разу для каждого маленького поворота. Изображение, получающееся в результате первого поворота, окрашивается в синий цвет, а в результате второго — в красный.

Лично я предпочитаю не возиться с целлофаном и научился сливать два изображения в единое стереоскопическое просто усилием воли. Мой метод требует, чтобы два повернутых изображения были уменьшены в размерах и перенесены на прилегающие друг к другу и не перекрывающиеся позиции на экране. Они должны быть одного и того же цвета, поэтому можно вполне обойтись черно-белым монитором, и расстояние между ними не должно превышать расстояния между зрачками наблюдателя. Не таращите глаза на сами изображения, а вместо этого смотрите на какую-нибудь точку между ними, представив, что она находится бесконечно далеко. Тогда два гиперкуба придут в движение, с легкими колебаниями начнут сближаться и, наконец, сольются в единое целое.

Даже если третье и четвертое измерения не подвергать специальной обработке, программа HYPERCUBE может генерировать изображения, очень напоминающие картинки Бэнкоффа. При последовательных поворотах на небольшие углы в третьем и четвертом измерениях читатели могут наблюдать, как два довольно грубой формы тора раздуваются, сжимаются и восстанавливают свою прежнюю форму, подобно их более «гладким» аналогам на иллюстрации, изображающей вращение гиперсферы.

Программа HYPERCUBE, очевидно, явилась причиной исчезновения моего друга Мэги. История этого четырехмерного помешательства закончилась благополучно. Как и следовало ожидать, он позвонил и говорил об удивительных вещах: «Вы, наверное, подумаете, что я сошел с ума, — сказал он. (Эта фраза всегда является верным признаком. . .) — Я только что плавал в четвертом измерении. Я видел, как мимо меня проносилось поперечное сечение моего дома. Тогда я подплыл ближе и пощекотал почки моей кошке. . .»



Вершина гиперкуба, поворачиваясь, уходит из трехмерного в четырехмерное пространство

Я избавлю читателя от дальнейших подробностей нашего разговора. Достаточно сказать, что я уговорил Мэги не запускать больше программу HYPERCUBE и проводить исследования исключительно в интеллектуальной плоскости. Он сказал, что последовал моему совету и теперь заявляет, что сделал множество замечательных открытий, пользуясь своим усилившимся внутренним зрением. Отметим, кстати, две придуманные им задачи, которые, кажется, достойны того, чтобы читатели над ними поразмыслили.

Давайте подумаем над такой последовательностью объектов: единичный отрезок прямой линии, единичный квадрат, единичный куб и т. д. Тогда n-м членом последовательности будет n-мерный аналог куба. Теперь попробуем провести два мысленных эксперимента над этими объектами. Проведем диагональ в n-мерном кубе и впишем n-мерную сферу в n-мерный куб; диагональ проходит от одной вершины к противоположной. Как будет изменяться ее длина по мере того, как n будет постепенно увеличиваться, и как будет меняться объем n-мерной сферы с ростом n? Ответы Мэги выглядят, мягко говоря, странноватыми. Я приведу их в следующей статье.

В РУБРИКЕ «Занимательный компьютер» в январском номере нашего журнала речь шла о двух программах, CLUSTER и SUPERCLUSTER, которые моделируют эволюцию звездного скопления. Приятно сознавать, что по крайней мере в не-

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

Издательство **МИР** *предлагает:*

Фельц А.
АМОРФНЫЕ И СТЕКЛООБРАЗНЫЕ НЕОРГАНИЧЕСКИЕ ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

Перевод с английского

Автор монографии профессор Фельц является одним из наиболее крупных специалистов ГДР, ученым с мировым именем. В книге рассматриваются вопросы теории аморфного и стеклообразного состояния и последние достижения в области практического применения аморфных материалов и стекол.

Содержание: Методы получения аморфных твердых тел и стекол. Термодинамический и кинетический аспекты стеклообразования. Особенности структуры и химической связи в стеклах и аморфных твердых телах. Различные химические классы аморфных и стеклообразных материалов. Электрические и оптические свойства стекол и корреляции между структурой и свойствами. Оптические свойства. Новые направления в применении аморфных и стеклообразных материалов.

Для химиков-неоргаников, технологов, работающих с некристаллическими материалами, физикохимиков.

1986, 30 л. Цена 4 р. 80 к.

Жители Москвы и пригородной зоны столицы могут купить нужную книгу в Доме книги. Остальные покупатели — в пределах СССР — направляют заказы в письменном виде по адресу: 121019, Москва, Калининский проспект, дом 26, п/я 42, Московский Дом книги, магазин №200.

Заказанная литература высылается наложенным платежом.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

скольких тысячах домов они породили новый вид развлечения, вытеснивший на время увлечение телевидением. Некоторые читатели написали о тех проблемах, с которыми они столкнулись при попытке самостоятельно моделировать поведение звезд в скоплении. Но причины этих проблем заключаются не в звездах, а в наших собственных ошибках.

Б. Дэвис из Энн-Арбора (шт. Мичиган) и П. Фортескью из Ла-Холла (шт. Калифорния), реализуя программу SUPERCLUSTER, испытали трудности при составлении уравнений ускорения. Мне кажется, эти трудности можно устранить, заменив силу f в уравнении, приведенном на с. 92, ускорением a, возникающим под действием этой силы. Чтобы получить a, нужно разделить f на массу притягиваемой звезды. Э. Одлицко из фирмы AT&T Bell Laboratories указал на то, что координаты звезд, приведенные в таблице на с. 93, выражены в тысячах астрономических единиц, а не просто в астрономических единицах. Ну что же, теперь наша Вселенная будет эволюционировать правильно.

Когда наблюдаешь работу программ CLUSTER и SUPERCLUSTER на экране дисплея, то порой очень трудно различить, какие звезды ближе к наблюдателю, а какие дальше. А. Инглиш из Делрей-Бича (шт. Флорида) и П. Стирнз из Лоди (шт. Калифорния) написали специальные отображающие программы, которые генерируют два изображения скопления, расположенные вплотную друг к другу, одно как видимое правым глазом и одно — как левым. Читатели, которые сумеют освоить приемы видения стереоскопического изображения, увидят звездные скопления так же, как и гиперкубы, в захватывающей дыхание глубокой перспективе.

Некоторые читатели уже составляли программы, подобные программе SUPERCLUSTER, но применяли их не к звездным скоплениям, а к нашей Солнечной системе. Программу SUPERCLUSTER также можно применить для этой цели. Читатели могут сами посмотреть в справочниках величины масс, скоростей и координаты 10 основных небесных тел Солнечной системы на какой-то момент времени и, запустив программу, наблюдать «свысока» за эволюцией системы. Уже через несколько минут наступит 2000 год. Дж. Филипс из Сан-Луи (шт. Миссури) написал программу, моделирующую поведение системы Земля — Луна, включив в нее маленький невесомый космический корабль. Запустить его с Земли так, чтобы он вышел на орбиту вокруг Луны, — задача не такая уж простая. Читатели, добившиеся определенных успехов в этой области, могут попробовать запустить космический корабль так, чтобы он прошел вблизи от всех планет-гигантов Солнечной системы и вышел за ее пределы.

У. Хофф из Шампейна (шт. Иллинойс) вычислял приращение времени в модели звездных скоплений динамически, введя переменную *dvmax* в начале программы. По ходу расчетов движения звезд программа всегда вычисляет максимальное ускорение *amax*. На следующем этапе моделирования величина приращения времени равна частному от деления *dvmax* на *amax*. Благодаря этой модификации изменения скорости звезд не могут превысить величины *dvmax*.

В майском номере журнала речь шла о тестах на умственное развитие, и там перед читателями было поставлено несколько вопросов относительно числовых последовательностей. Первая задача мини-теста может послужить хорошим примером неоднозначности, обычно присутствующей в подобных задачах. Нужно было продолжить последовательность 3, 7, 16, 35,. . . . Если из каждого члена последовательности вычесть удвоенный предыдущий член, то получится последовательность 1, 2, 3, . . . — второй ряд пирамиды. Согласно этому правилу, следующий член должен быть равен: $35 \times 2 + 4$, т. е. 74. В то же время если построить простую пирамиду разностей в три ряда, то в третьем ряду мы получим 5 и 10. Разумно поэтому достроить этот ряд числом 15. Но тогда соответственно исходную последовательность нужно дополнить числом 69. Следует сказать, что программы, описанные в нашей предыдущей статье, упустили бы этот ответ. Теперь приведем ответы на вопросы мини-теста: отсутствующая буква — это З (если считать, что в алфавите нет буквы ё); отсутствующее слово — БАР; неподходящее слово — ЛЮБОВЬ; неитальянский город — Тонопа; правильная геометрическая аналогия та, что под номером 2.

Две числовые последовательности на с. 92 дополняются соответственно числами 350 и 22. Задача с первой числовой последовательностью, приведенной на с. 90, решается путем применения обобщенного правила разностей при $k = 3$, а затем обобщенного правила частного; отсутствующий член равен 324. Задача со второй последовательностью должна остаться неприступной для всех, кроме, может быть, самых терпеливых любителей головоломок, если решающие не написали программу SE Q. Задача может быть решена путем применения двух правил частного. Значение k в первом правиле равно 5. Отсутствующий член равен −65 551.